2011 秋 B卷

发信人: Damocles (水神计划), 信区: e\_note

标 题: 泛函分析（一） 步尚全 2011.1.13

发信站: 酒井BBS (Thu Jan 13 10:58:54 2011), 转信

数学系开的研究生课程

一（20分）、\Omega为非空集合，B(\Omega)为定义在\Omega上的有界线性泛函，f\in B(\Omega)，定义||f||=sup\_{x\in \Omega}|f(x)|，证明：

1,||.||是定义在\Omega上的范数

2,(B(\Omega), ||.||)是完备的赋泛空间

二（20分）、X是一个定义在复数域上的度量空间，a\in C，A是X的子集，且满足|a|\neq 0，aA={ax|x\in A}，证明：

1,(aA)的闭包=a(A的闭包)

2,A为闭集是aA为闭集的充要条件

三（20分）、K是一个非空紧集，T为K->K的算子，且满足\for all x,y\in K，d(Tx,Ty)<d(x,y)，令f(x)=d(x,Tx)，证明：

1,f是连续函数

2,K中有唯一不动点

四（20分）、X为Banach空间，f\_n\in X'，lim\_{n->\inf}f\_n(x)存在，定义f(x)=lim\_{n->\inf}f\_n(x)，证明：

1.存在一个常数C满足||f\_n||<C

2.f是线性泛函

3.f\in X'，且满足||f||<= sup||f\_n||

4.举例说明，如果X不是完备空间，则3不成立

五（20分）、H为Hilbert空间，A为H->H的线性有界算子，且满足C||x||^2<=|<Ax, x>|，其中C为大于0的常数。定义R(A)={Ax|x\in H}，证明：

1.A为单射

2.R(A)为A的闭子空间

3.R(A)在H中稠密，并且由此证明A为一一映射

4.A^{-1}有界，且满足||AA^{-1}||<=1/C

--――-――-―-―-―-―----―-―--―――----――-

我欲成仙，快乐齐天，变幻出神话在风中流传。

真心走过每个瞬间，再来对孩子款款笑谈。

我欲成仙，快乐齐天，让我对得起美丽寓言。

天降我在天地之间，总该有故事让后人看。